# PART4 方程式の表す図形

## 要点整理と公式

### 要点 ① 垂直二等分線

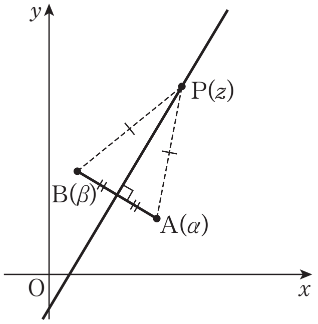
複素数平面上の 2 点 A($\alpha$)，B($\beta$) を結ぶ線分 AB の垂直二等分線上の点を P($z$) とすると

　　　＝

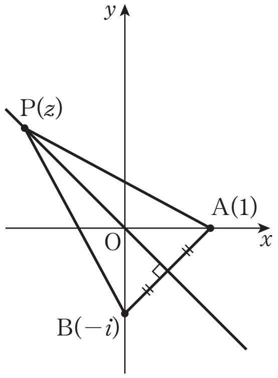
であるから，方程式

$|\qquad| = |\qquad|$

を満たす点 $z$ は，線分 AB の垂直二等分線を描く。




(ex) 方程式 $|z-1|=|z+i|$ を満たす点 $z$ は，2 点 A(　)，B(　) を結ぶ線分 AB の垂直二等分線を描く。




$z=x+yi$ ($x$，$y$ は実数) とおくと

$$|z-1|=|z+i|$$

つまり　$|x-1+yi|=|x+(y+1)i|$ より

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y+1)^2}$$

$$(x-1)^2+y^2=x^2+(y+1)^2 \qquad \text{よって } y=-x$$

これは，原点を通る傾きが $-1$ の直線，すなわち 2 点 1，$-i$ を結ぶ線分の垂直二等分線を表す。

### 要点 ② 円

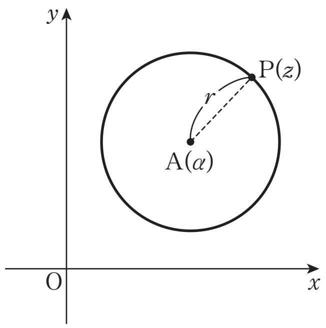
複素数平面上の点 A($\alpha$) を中心とする半径 $r$ の円上の点を P($z$) とすると

　　　$= r$

であるから，方程式

$|\qquad| = r$

を満たす点 $z$ は，点 A を中心とする半径 $r$ の円を描く。



(ex) 方程式 $|z-(2+i)|=2$ を満たす点 $z$ は

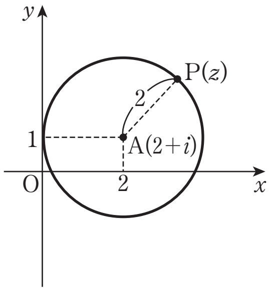
点 A(　　) を中心とする半径　の円を描く。

$z=x+yi$ ($x$, $y$ は実数) とする。

$$|z-(2+i)|=2$$

つまり $|(x-2)+(y-1)i|=2$ より

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=2 \qquad (x-2)^2+(y-1)^2=2^2$$




これは，点 $2+i$ を中心とする半径 2 の円を表す。

**4** 次の方程式を満たす点$z$は，どのような図形を描くか求めよ。

(1) $|z|=|z-3i|$

(2) $|z-2+4i|=\sqrt{2}$

(3) $(z+i)(\overline{z}-i)=9$

(4) $|z+1|=2|z-2|$

## Point Pickup

**方程式の表す図形**

異なる2点 A$(\alpha)$，B$(\beta)$ について

方程式 $|z-\alpha|=|z-\beta|$ を満たす点$z$ …… 線分ABの垂直二等分線

方程式 $|z-\alpha|=r$ $(r>0)$ を満たす点$z$ …… 点Aを中心とする半径$r$の円

また，$z=x+yi$ ($x$，$y$は実数) とおき，$x$，$y$の関係式を作ることで，$z$が描く図形の方程式を求める方法がある。

# 第 8 講 PART4 確認問題

**1** 方程式 $|z|=|z+2i|$ を満たす点 $z$ は，どのような図形を描くかを求めよ。

答えは次の①～④のうちから答えよ。 ア

① 2 点 0，$2i$ を結ぶ線分の垂直二等分線

② 2 点 0，$-2i$ を結ぶ線分の垂直二等分線

③ 点 $-2i$ を中心とする半径 2 の円

④ 2 点 0，$2i$ を直径の両端とする円

**2** 方程式 $|z-3+2i|=4$ を満たす点 $z$ は，どのような図形を描くかを求めよ。

答えは次の①～④のうちから答えよ。 イ

① 点 $3-2i$ を中心とする半径 2 の円

② 点 $3-2i$ を中心とする半径 4 の円

③ 点 $-3+2i$ を中心とする半径 2 の円

④ 点 $-3+2i$ を中心とする半径 4 の円

**3** 方程式 $(z-3i)(\overline{z}+3i)=2$ を満たす点 $z$ は，どのような図形を描くかを求めよ。

答えは次の①～④のうちから答えよ。 ウ

① 2 点 $3i$，$-3i$ を結ぶ線分の垂直二等分線

② 点 $3i$ を中心とする半径 2 の円

③ 点 $3i$ を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円

④ 点 $-3i$ を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円

**4** 方程式 $|z+2|=2|z-1|$ を満たす点 $z$ は，どのような図形を描くかを求めよ。

答えは次の①～④のうちから答えよ。 **エ**

① 2点 $-2$，$1$ を結ぶ線分の垂直二等分線

② 原点を中心とする半径2の円

③ 点2を中心とする半径2の円

④ 点2を中心とする半径4の円

**[MEMO]**

# PART4 方程式の表す図形

**4** 次の方程式を満たす点 $z$ は，どのような図形を描くか求めよ。

(1) $|z|=|z-3i|$　　(2) $|z-2+4i|=\sqrt{2}$

(3) $(z+i)(\overline{z}-i)=9$　　(4) $|z+1|=2|z-2|$

---

**[解答]**

(1) 2 点 0，$3i$ を結ぶ線分の垂直二等分線

(2) $|z-(2-4i)|=\sqrt{2}$ より，点 $2-4i$ を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円

(3) $z=x+yi$ ($x$，$y$ は実数)とおくと

$(z+i)(\overline{z}-i)=9$ より $\{x+(y+1)i\}\{x-(y+1)i\}=9$　　$x^2+(y+1)^2=9$

よって 点 $-i$ を中心とする半径 3 の円

(別解)　$(z+i)(\overline{z}-i)=9$ より $(z+i)(\overline{z+i})=9$ つまり $|z+i|^2=9$

よって $|z+i|=3$ より 点 $-i$ を中心とする半径 3 の円

(4) $z=x+yi$ ($x$，$y$ は実数)とおくと

$|x+1+yi|=2|(x-2)+yi|$

$\sqrt{(x+1)^2+y^2}=2\sqrt{(x-2)^2+y^2}$

$(x+1)^2+y^2=4\{(x-2)^2+y^2\}$　　$x^2-6x+y^2+5=0$

よって $(x-3)^2+y^2=4$ より 点 3 を中心とする半径 2 の円

(別解)　$|z+1|=2|z-2|$ より $|z+1|^2=4|z-2|^2$

$(z+1)(\overline{z+1})=4(z-2)(\overline{z-2})$　　$(z+1)(\overline{z}+1)=4(z-2)(\overline{z}-2)$

$z\overline{z}-3z-3\overline{z}+5=0$

$(z-3)(\overline{z}-3)=4$　　$(z-3)(\overline{z-3})=4$　　$|z-3|^2=4$

よって $|z-3|=2$ より 点 3 を中心とする半径 2 の円

# 第 8 講 PART4 確認問題 解答

## 1

**[正解]** ア：②

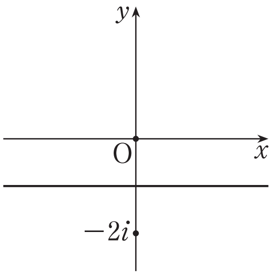
**[解説]**

$|z|=|z+2i|$ より，

$|z-0|=|z-(-2i)|$

これを満たす点 $z$ は，

**2 点 0，$-2i$ を結ぶ線分の垂直二等分線**を描く。[A]




[A] 異なる 2 点 A($\alpha$)，B($\beta$) について，方程式 $|z-\alpha|=|z-\beta|$ を満たす点 $z$
…線分 AB の垂直二等分線を描く。

## 2

**[正解]** イ：②

**[解説]**

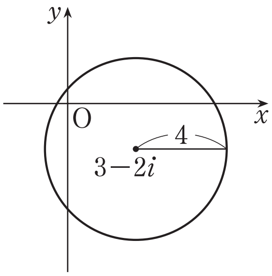
$|z-3+2i|=4$ より，

$|z-(3-2i)|=4$

これを満たす点 $z$ は，

**点 $3-2i$ を中心とする半径 4 の円**を描く。

[B]




[B] 異なる 2 点 A($\alpha$)，B($\beta$) について，方程式 $|z-\alpha|=r$ $(r>0)$ を満たす点 $z$
…点 $\alpha$ を中心とする半径 $r$ の円を描く。

## 3 [正解] ウ：③

**[解説]**

$$(z-3i)(\overline{z}+3i)=2 \quad \cdots\cdots(*)$$

$z=x+yi$ ($x$, $y$ は実数) とおく。

$(*)$ に代入すると,

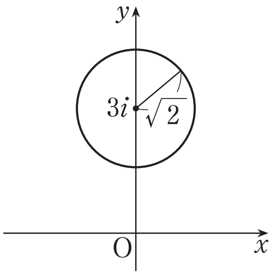
$$(x+yi-3i)(x-yi+3i)=2$$

$$\{x+(y-3)i\}\{x-(y-3)i\}=2$$

$$x^2+(y-3)^2=2 \quad \text{[C]}$$

[C] この方程式は，円の方程式である。

よって，$(*)$ を満たす点 $z$ は，**点 $3i$ を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円を描く。**




(別解)

$(z-3i)(\overline{z}+3i)=2$ より,

$$(z-3i)(\overline{z-3i})=2$$

$$|z-3i|^2=2 \quad \text{[D]}$$

[D] $z\overline{z}=|z|^2$

よって，$|z-3i|=\sqrt{2}$ だから，点 $z$ は，

**点 $3i$ を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円を描く。**

**4**　**[正解]エ：③**

**[解説]**

$|z+2|=2|z-1|$　……(＊)

$z=x+yi$ ($x$, $y$ は実数)とおく。

(＊)に代入すると，

$|x+2+yi|=2|x-1+yi|$

$\sqrt{(x+2)^2+y^2}=2\sqrt{(x-1)^2+y^2}$ [E]

[E]　$|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$

両辺を 2 乗すると，

$(x+2)^2+y^2=4\{(x-1)^2+y^2\}$

$3x^2-12x+3y^2=0$

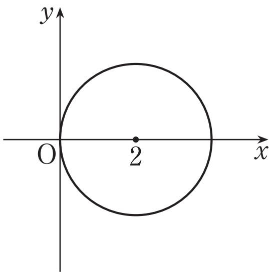
$x^2-4x+y^2=0$

$(x-2)^2+y^2=4$ [F]

[F]　この方程式は，円の方程式である。

よって，(＊)を満たす点 $z$ は，

**点 2 を中心とする半径 2 の円を描く。**




(別解)

$|z+2|=2|z-1|$

両辺を 2 乗すると，

$|z+2|^2=4|z-1|^2$

$(z+2)(\overline{z+2})=4(z-1)(\overline{z-1})$ [G]

[G]　$|z|^2=z\overline{z}$

$(z+2)(\overline{z}+2)=4(z-1)(\overline{z}-1)$

$z\overline{z}+2z+2\overline{z}+4=4z\overline{z}-4z-4\overline{z}+4$

$z\overline{z}-2z-2\overline{z}=0$

$(z-2)(\overline{z}-2)=4$

$(z-2)(\overline{z-2})=4$

$|z-2|^2=4$

よって，$|z-2|=2$ より，点 $z$ は，

**点 2 を中心とする半径 2 の円を描く。**